Il problema a una fase. Condizione di ottimalità in senso di viscosità

Lemma 1. *Sia S un insieme aperto e connesso nella sfera $\mathbb{S}^{d-1} = \partial B_1$ tale che $\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1 \setminus S) > 0$. Allora, esiste un unico minimo del problema variazionale*

$$\min\Big\{ \int_S |\nabla_\theta \phi|^2 \, d\theta \ : \ \phi \in H^1_0(S), \ \int_S \phi^2 \, d\theta = 1 \Big\}, \tag{1}$$

dove $H^1_0(S)$ è la chiusura delle funzioni $C^\infty_c(S)$ rispetto alla norma $H^1(S)$.

Proof. Osserviamo intanto che esiste una costante $\kappa > 0$ tale che

$$\int_S \phi^2 \, d\theta \le \kappa \int_S |\nabla_\theta \phi|^2 \, d\theta \quad \text{per ogni} \quad \phi \in H^1_0(S). \tag{2}$$

Inoltre, l'inclusione $H^1_0(S) \subset L^2(\partial B_1)$ è compatta.

Step 1. Esistenza di minimi. Prendiamo ora una successione minimizzante ϕ_n per (1). Usando (2), la successione è limitata in $H^1(\partial B_1)$. Esiste quindi una sottosuccessione convergente ad una certa funzione $\phi \in H^1_0(S)$. Siccome la convergenza è forte L^2 e debole H^1 abbiamo che ϕ è un minimo di (1).

Step 2. Estensione omogenea. Definiamo

$$\lambda := \int_S |\nabla_\theta \phi|^2 \, dx.$$

Per la minimalità di ϕ, abbiamo

$$\int_S \nabla_\theta \phi \cdot \nabla_\theta \psi \, d\theta = \lambda \int_S \phi \psi \, d\theta \quad \text{per ogni} \quad \psi \in H^1_0(S),$$

ovvero

$$-\Delta_{\partial B_1} \phi = \lambda \phi \quad \text{su} \quad S.$$

Di conseguenza, la funzione

$$u(r\theta) = r^\alpha \phi(\theta)$$

è armonica nel cono

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \frac{x}{|x|} \in S\},$$

dove $\alpha > 0$ è l'unica soluzione di

$$\alpha(\alpha + d - 2) = \lambda.$$

Step 3. Non-esistenza di soluzioni che cambiano segno. Come conseguenza, non esistono minimi ϕ di (1) che sono funzioni non-negative che si annullano in S. Altrimenti u sarebbe una funzione armonica e non-negativa che si annulla in un punto interno del cono $\mathcal{C}$. Se ora ϕ è una soluzione che cambia segno in $\mathcal{S}$, allora anche il suo modulo $|\phi|$ è una soluzione di (1). Il che è impossibile perché (siccome S è connesso) in questo caso ϕ si annulla in S.

Step 4. Unicità del minimo. Supponiamo ora che esistono due minimi diversi ϕ_1 e ϕ_2 di (1). Possiamo supporre che ϕ_1 e ϕ_2 sono funzioni nonnegative su S. Di conseguienza, $\phi_1 > 0$ e $\phi_2 > 0$ su S. Definiamo

$$c := \int_{\partial B_1} \phi_1 \phi_2.$$

Allora, la funzione

$$\phi_1 - c\phi_2$$

è ortogonale a ϕ_2 e di conseguenza deve cambiare segno. Inoltre,

$$-\Delta_{\partial B_1}(\phi_1 - c\phi_2) = \lambda(\phi_1 - c\phi_2) \quad \text{su} \quad S.$$

Testando l'equazione con $\phi_1 - c\phi_2$ otteniamo

$$\int_S |\nabla_\theta(\phi_1 - c\phi_2)|^2 \, d\theta = \int_S (\phi_1 - c\phi_2)^2 \, d\theta,$$

e quindi un multiplo di $(\phi_1 - c\phi_2)$ è soluzione di (2), ma questo è in contraddizione con il punto precedente. $\square$

Proposizione 2. *Sia D un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u : D \to \mathbb{R}$ ($u \geq 0$ in D) un minimo locale di $\mathcal{F}$ in D.*
(a) *Se $\varphi : D \to \mathbb{R}^d$ è una funzione $C^\infty(D)$ tale che φ_+ tocca u da sopra in $x_0 \in \partial\{u > 0\}$, allora:*
$$|\nabla\varphi(x_0)| \geq 1.$$
(b) *Se $\varphi : D \to \mathbb{R}^d$ è una funzione $C^\infty(D)$ tale che φ_+ tocca u da sotto in $x_0 \in \partial\{u > 0\}$, allora:*
$$|\nabla\varphi(x_0)| \leq 1.$$

Proof. Sia u_0 un blow-up di u nel punto x_0. Sappiamo che:

- $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione non-negativa e Lipschitz continua su $\mathbb{R}^d$;
- u_0 è 1-omogenea; in particolare, possiamo scrivere u_0 in coordinate polari come
$$u_0(r, \theta) = r\phi(\theta),$$
dove la funzione $\phi : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ è non-negativa e lipschitziana;
- u_0 è armonica su $\{u_0 > 0\}$; in particolare, ϕ è C^∞ su $\{\phi > 0\}$ e
$$-\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}\phi(\theta) = (d-1)\phi(\theta) \quad \text{per ogni} \quad \theta \in \{\phi > 0\} \cap \partial B_1.$$
Inoltre, testando l'equazione con ϕ stessa abbiamo che
$$\int_{\partial B_1} |\nabla_\theta \phi|^2\, dx = (d-1)\int_{\partial B_1} \phi^2\, d\theta.$$

Supponiamo che φ_+ tocca u da sopra in $x_0 \in \partial\{u > 0\} \cap D$. Sia φ_0 il blow-up di φ_+ in x_0, ovvero
$$\varphi_0(x) = \big(x \cdot \nabla\varphi(x_0)\big)_+.$$
Senza perdità di generalità possiamo supporre che
$$\nabla\varphi(x_0) = e_d|\nabla\varphi(x_0)|.$$
Ora, siccome
$$\varphi_0 \geq u_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d,$$
abbiamo che $\phi \in H^1_0(\{x_d > 0\} \cap \partial B_1)$. Inoltre, visto che $S := \{x_d > 0\} \cap \partial B_1$ è un insieme connesso della sfera, per Lemma 1 esiste un'unica soluzione del problema
$$\lambda := \min\Big\{ \int_S |\nabla_\theta \phi|^2\, d\theta \ : \ \phi \in H^1_0(S),\ \int_S \phi^2\, d\theta = 1 \Big\}.$$
Osserviamo ora che la funzione $\psi(\theta) = (\theta \cdot \nu)_+$ è nonnegativa ed è una soluzione del problema
$$-\Delta_{\partial B_1}\psi = (d-1)\psi \quad \text{in} \quad S.$$
Abbiamo quindi che necessariamente $\lambda = (d-1)$ e (usando di nuovo Lemma 1) che ϕ è un multiplo di x_d^+. Siccome u_0 è un minimo locale di $\mathcal{F}$, abbiamo che
$$u_0(x_d) = x_d^+.$$
Ora siccome
$$|\nabla\varphi(x_0)|x_d^+ = \varphi_0(x) \geq u_0(x) = x_d^+ \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
abbiamo che necessariamente
$$|\nabla\varphi(x_0)| \geq 1.$$
Quando φ_+ tocca u da sotto in x_0 il ragionamento è analogo. L'unica differenza è che come insieme S bisogna considerare la componente connessa di $\{\phi > 0\}$ che contiene $\{x_d > 0\} \cap \partial B_1$. □